

20 因数分解(中3)まとめ

1 次の hakken. の法則を読んで内容を覚えなさい。

ABCDE

因数分解

hakken. の法則 

★**因数**^{いんすう}…単項式や多項式が、いくつかの単項式や多項式の積の形で表されるとき、その1つ1つの式を、もとの式の**因数**という。

例 $2xy$ では、 2 、 x 、 y は因数である。

★**因数分解**^{いんすうぶんかい}…多項式をいくつかの因数の積の形に表すことをその多項式を**因数分解**するという。

★**共通因数**^{きょうつういんすう}… $ax+ay$ のように、各項に共通な因数 a をもつ多項式は、**共通因数** a をとり出して因数分解することができる。

例 次の式を因数分解しなさい。

$$(1) \quad x^2 - 6x = \underline{x} \times x - \underline{x} \times 6 \\ = \underline{x}(x - 6)$$

$$(2) \quad 4ab + 2a = \underline{2a} \times 2b + \underline{2a} \times 1 \\ = \underline{2a}(2b + 1)$$

共通因数

展開
 $(2x+3)(2x-3) \longleftrightarrow 4x^2-9$
因数分解

$$ax+ay=a(x+y)$$

2 次の式を因数分解しなさい。

ABCDE

① $a^2b - ac$

② $x^2y - xy^2$

3 次の式を因数分解しなさい。

ABCDE

① $9x^2y + 12xy^2$

② $12x^2y - 9xy^2 + 3xy$

4 次の hakken. の法則を読んで内容を覚えなさい。

ABCDE

因数分解の公式を使った因数分解



★公式 1' $x^2 + (a+b)x + ab = (x+a)(x+b)$

公式 2' $x^2 + 2xy + y^2 = (x+y)^2$

公式 3' $x^2 - 2xy + y^2 = (x-y)^2$

公式 4' $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$

★公式 1' $x^2 + (a+b)x + ab = (x+a)(x+b)$ を利用した因数分解

例 (1) $x^2 + 6x + 5$

(2) $t^2 - 6t + 8$

[解き方] $x^2 + 6x + 5$
 $\begin{array}{|l} \boxed{+6}x \quad \boxed{+5} \\ \hline \boxed{a+b=6} \quad \boxed{ab=5} \end{array}$

$t^2 - 6t + 8$
 $\begin{array}{|l} \boxed{-6}t \quad \boxed{+8} \\ \hline \boxed{a+b=-6} \quad \boxed{ab=8} \end{array}$

積が+5	和が+6
1, 5	○
-1, -5	

積が+8	和が-6
1, 8	
-1, -8	
2, 4	
-2, -4	○

$x^2 + 6x + 5 = (x+1)(x+5)$

$t^2 - 6t + 8 = (t-2)(t-4)$

[答] $(x+1)(x+5)$

[答] $(t-2)(t-4)$

★公式 2', 公式 3' $x^2 + 2xy + y^2 = (x+y)^2$, $x^2 - 2xy + y^2 = (x-y)^2$ を利用した因数分解

例 (1) $9x^2 + 12x + 4$

(2) $4a^2 - 20ab + 25b^2$

[解き方] $9x^2 = (3x)^2$, $4 = 2^2$, $12x = 2 \times 3x \times 2$ $4a^2 = (2a)^2$, $25b^2 = (5b)^2$, $20a = 2 \times 2a \times 5b$

[答] $(3x+2)^2$

[答] $(2a-5b)^2$

★公式 4' $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$ を利用した因数分解

例 (1) $9x^2 - 4$

(2) $64x^2 - 1$

$= (3x)^2 - 2^2$

$= (8x)^2 - 1^2$

$= (3x+2)(3x-2)$

$= (8x+1)(8x-1)$

[答] $(3x+2)(3x-2)$

[答] $(8x+1)(8x-1)$

5 次の式を因数分解しなさい。

ABCDE

① $a^2 - 6a - 16$

② $x^2 + 2x - 15$

③ $t^2 + 11t + 18$

④ $y^2 - 5y - 36$

6 次の式を因数分解しなさい。

ABCDE ① $x^2 - 2xy - 3y^2$

② $x^2 + 8xy + 16y^2$

③ $x^2 - 10xy + 9y^2$

④ $a^2 + 4ab - 5b^2$

7 次の式を因数分解しなさい。

ABCDE ① $x^2 - 9y^2$

② $x^2 + 8xy + 12y^2$

③ $x^2 - 10xy - 24y^2$

④ $x^2 - 8xy + 16y^2$

8 次の式を因数分解しなさい。

ABCDE ① $x^2 + 3xy - 10y^2$

② $x^2 + 8xy + 7y^2$

③ $x^2 + 12xy + 36y^2$

④ $9 + x^2 - 10x$

9 $x^2 + 7x + a$ が、自然数 b, c を用いて $(x+b)(x+c)$ と因数分解できるような定数 a の値をすべて答えなさい。

15 次の式を因数分解しなさい。

BCDE ① $2x(3-y)-y+3$

② $xy-x-y+1$

16 次の式を因数分解しなさい。

BCDE ① $ax+ay-bx-by$

② $(x+y)^2-81$

17 次の式を因数分解しなさい。

BCDE ① x^2-x-y^2+y

② $x^2-4x+4-y^2$

18 次の hakken. の法則を読んで内容を覚えなさい。

BCDE

いろいろな因数分解 (3)

hakken. の法則 

例 (1) x^2+ax-3 を因数分解すると $(x-3)(x+b)$ になるとき、 a 、 b の値を求めなさい。

[解き方] $(x-3)(x+b)$ を展開すると、 $x^2+(-3+b)x-3b$ となるので

$$x^2+ax-3=x^2+(-3+b)x-3b$$

$$\begin{cases} a = (-3+b) & \dots \text{①} \\ 3 = 3b & \dots \text{②} \end{cases} \quad \text{連立方程式を解くと}$$

②より $b=1$ これを①に代入して $a=-2$

[答] $a=-2, b=1$

(2) $x^2+px-5=(x+a)(x+b)$ の形に因数分解できるような整数 p の値をすべて答えなさい。

[解き方] $-5=5 \times (-1)$, $-5=1 \times (-5)$ だから

$$\begin{aligned} x^2+px-5 &= (x+5)(x-1) \\ &= x^2+4x-5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x^2+px-5 &= (x+1)(x-5) \\ &= x^2-4x-5 \end{aligned}$$

[答] $p=-4, +4$

19 次の問いに答えなさい。

BCDE ① x^2+ax-6 を因数分解すると $(x-3)(x+b)$ になるとき、 a 、 b の値を求めなさい。

② $x^2+px-18=(x+a)(x+b)$ の形に因数分解できるような整数 p の値をすべて答えなさい。

20 次の hakken. の法則を読んで内容を覚えなさい。

CDE

式の計算の利用 啓 P.29~30

hakken. の法則 

例 連続する 2 つの奇数の積に 1 を加えた数は 4 の倍数になることを証明しなさい。

[証明] n を整数とすると、連続する 2 つの奇数は $2n+1$ 、 $2n+3$ と表される。

それらの積に 1 を加えた数は $(2n+1)(2n+3)+1$

$$=4n^2+8n+3+1$$

$$=4n^2+8n+4$$

$$=4(n+1)^2$$

$n+1$ は整数なので、 $4(n+1)^2$ は、4 の倍数である。

よって連続する 2 つの奇数の積に 1 を加えた数は、4 の倍数になる。

21 連続した 2 つの奇数の積は奇数になることを証明しなさい。

CDE

- 22 連続する 3 つの整数で、最大の数と最小の数の積に 1 を加えた数は、中央数の平方になることを証明しなさい。

CDE

- 23 次の hakken. の法則を読んで内容を覚えなさい。

ABCDE

因数分解や展開を利用した計算

hakken. の法則 

★因数分解の公式や式の展開を利用すると、計算が簡単にできることがある。

例 (1) $65^2 - 35^2 = (65 + 35)(65 - 35)$
 $= 100 \times 30$
 $= 3000$

(2) $85^2 = (80 + 5)^2$
 $= 80^2 + 2 \times 80 \times 5 + 5^2$
 $= 6400 + 800 + 25$
 $= 7225$

(3) $28 \times 32 = (30 - 2)(30 + 2)$
 $= 30^2 - 2^2$
 $= 900 - 4$
 $= 896$

- 24 因数分解や展開を利用して、次の計算をしなさい。

ABCDE

① 29^2

② 103×97

- 25 因数分解や展開を利用して次の計算をしなさい。

CDE

① 3.04×2.96

② $5.1^2 \times 3.14 - 4.9^2 \times 3.14$

26 次の hakken. の法則を読んで内容を覚えなさい。

BCDE

式の値の計算

hakken. の法則 

例 $x=35, y=3$ のとき, $(x+3y)^2 - (x+y)(x+4y)$ の値を求めなさい。

[解き方] 式を簡単にしてから代入する。

$$\begin{aligned} (x+3y)^2 - (x+y)(x+4y) &= x^2 + 6xy + 9y^2 - (x^2 + 5xy + 4y^2) \\ &= xy + 5y^2 \\ &= y(x + 5y) \\ &= 3 \times (35 + 5 \times 3) \\ &= 3 \times 50 \\ &= 150 \end{aligned}$$

27 $x=27$ のとき, $(x-3)(x-6) - (x-5)^2$ の値を求めなさい。

BCDE

28 $x=17, y=5$ のとき, $(x+y)(x-y) - x(x-2y)$ の値を求めなさい。

BCDE

29 $a=6.25, b=3.75$ のとき, $a^2 - b^2$ の値を求めなさい。

BCDE

30 $a+b=4, ab=-\frac{9}{4}$ のとき, 次の式の値を求めなさい。

BCDE

① $a^2 + b^2$

② $(a^2 - 1)(b^2 - 1)$

31 次の hakken. の法則を読んで内容を覚えなさい。

CDE

図形の性質の証明

hakken. の法則 

例 右の図のように、一辺の長さが x である正方形の土地の周りに、幅 a の道がある。この道の面積を S 、道のまん中を通る線の長さを ℓ とするとき、 $S=a\ell$ となる。このことを証明しなさい。

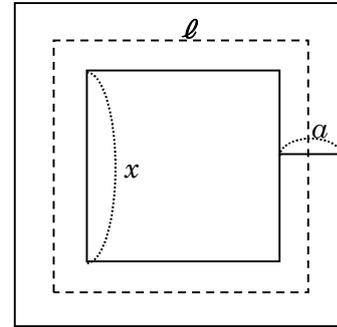
[解き方] S 、 ℓ をそれぞれ a 、 x を使って表す。

[証明]
$$S=(x+2a)^2-x^2=x^2+4ax+4a^2-x^2=4ax+4a^2 \quad \dots \textcircled{1}$$

$$\ell=4(x+a)=4x+4a$$

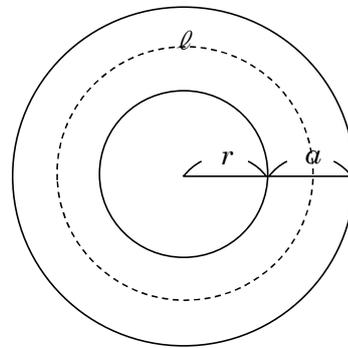
したがって、 $a\ell=a(4x+4a)=4ax+4a^2 \quad \dots \textcircled{2}$

①、②より、 $S=a\ell$



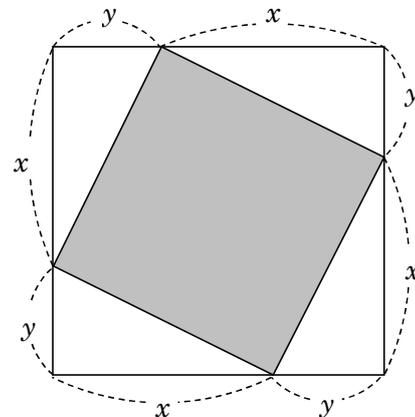
32 半径 r の池の周りに幅 a の道がついている。道のまん中を通る線の長さを ℓ とすると、

CDE 道の面積は、 $S=a\ell$ になることを証明しなさい。



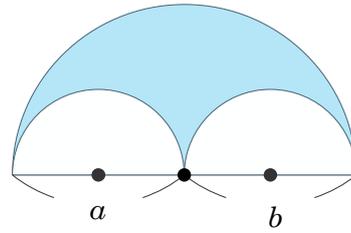
33 右の図のような正方形で、色をつけた中の四角形の面積を求めなさい。

CDE



34 右の図の色を付けた部分の面積を求めなさい。

DE



35 右の図で $AC : CB$ と面積 $P : Q$ の間にはどんな関係があるか答えなさい。

DE

